



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: یک ۱

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

www.PnuNews.com  
www.PnuNews.net

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (تعدادی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱- تابع  $f$  با ضابطه  $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \cap [a, b] \\ -1 & x \notin Q \cap [a, b] \end{cases}$  بر  $[a, b]$  تعریف شده و  $\alpha$  تابعی صعودی دلخواهی می باشد

کدام گزینه صحیح است؟

۲.  $\int_a^b f d\alpha = \alpha(b) - \alpha(a)$

۱.  $\int_a^b f d\alpha + \int_a^b \overline{f} d\alpha = 0$

۴.  $f \in R(\alpha)$

۳.  $\int_a^b \overline{f} d\alpha = \alpha(a) - \alpha(b)$

۲- اگر  $\int_a^b f^2(x) dx = 2$  و  $f(a) = f(b) = 0$  انگاه مقدار  $\int_a^b x f(x) f'(x) dx$  برابرست با:

۴.  $b-a$

۳. ۱

۲. ۲

۱. -۱

۳- تابع  $f$  بر  $[a, b]$  مشتق پذیر است و  $f^2(x) = \int_a^x f(t) dt$ ، تابع  $f$  کدام گزینه است؟

۴.  $\frac{x}{2}$

۳.  $2x$

۲.  $x-a$

۱.  $\frac{x-a}{2}$

۴- اگر  $P, Q$  دو افراز دلخواه از بازه  $[a, b]$  و  $P \subseteq Q$  باشند انگاه

۲.  $L(P, f, \alpha) \geq L(Q, f, \alpha)$

۱.  $U(P, f, \alpha) \leq U(Q, f, \alpha)$

۴.  $U(p, f, \alpha) = L(Q, f, \alpha)$

۳.  $L(Q, f, \alpha) \leq U(P, f, \alpha)$

۵- اگر  $f \in R(\alpha)$  بر  $[a, b]$  کدام گزینه صحیح است؟  $\|f\|_2 = \left( \int_a^b |f|^2 d\alpha \right)^{\frac{1}{2}}$

۱.  $\left| \int_a^b f g d\alpha \right| \geq \|f\|_2 \|g\|_2$

۲.  $\|f + g\|_2 \geq \|f\|_2 + \|g\|_2$

۳.  $\|f - h\|_2 \geq \|f - g\|_2 + \|g - h\|_2$

۴. برای هر  $\epsilon > 0$  تابع پیوسته ای مانند  $\Phi$  وجود دارد که  $\|f - \Phi\|_2 < \epsilon$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

www.PnuNews.com  
www.PnuNews.net

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۶- اگر تابع  $f$  بر  $[a, b]$  پیوسته و اکیدا صعودی باشد و  $f(a) = A$  و  $f(b) = B$  انگاه  $\int_a^b f(x)dx + \int_A^B f^{-1}(x)dx$  برابرست با:

۱.  $Bb - Aa$       ۲.  $AB - ab$       ۳.  $Ba - Ab$       ۴.  $ab - AB$

۷- کدامیک از انتگرالهای زیر به طور مطلق همگراست؟

۱.  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$       ۲.  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$       ۳.  $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$       ۴.  $\int_0^{\infty} \frac{\cos x}{x+1} dx$

۸- اگر به ازای هر عدد حقیقی  $T$  تابع  $f$  بر بازه  $[a, T]$  انتگرال پذیر باشد. شرط لازم و کافی برای آنکه  $\int_a^{\infty} f$  موجود باشد ان است که

۱.  $\forall \epsilon > 0 \exists T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \leq T_1 \leq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$       ۲.  $\forall \epsilon > 0 \forall T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$

۳.  $\forall \epsilon > 0 \forall T_0 \forall T_1, T_2 (T_2 \leq T_1 \leq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$       ۴.  $\forall \epsilon > 0 \exists T_0 \exists T_1, T_2 (T_2 \geq T_1 \geq T_0 \Rightarrow \left| \int_{T_1}^{T_2} f \right| < \epsilon)$

۹- تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  با تغییر کراندار است اگر و فقط اگر

۱. تفاضل دو تابع صعودی باشد.      ۲. دارای مشتق کراندار باشد.
۳. یکنوا باشد.      ۴. کراندار باشد.

۱۰- تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  با تغییر کراندار است و  $V_f$  تغییرات کلی تابع  $f$  را نشان می دهد. تابع  $V$  را چنین تعریف می کنیم:

$$V(x) = \begin{cases} V_f(a, x) & a < x \leq b \\ 0 & x = a \end{cases}$$

۱.  $V$  بر  $[a, b]$  نزولی است.      ۲.  $D = V - f$  بر  $[a, b]$  صعودی است.
۳.  $V$  بر  $[a, b]$  ثابت است.      ۴.  $D = V - f$  بر  $[a, b]$  ثابت است.

۱۱- تابع  $f$  بر بازه  $[a, b]$  در شرط یکنواخت لپشیتز از مرتبه  $\alpha > 0$  صدق میکند هرگاه

$$\exists M \forall x, y (|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha) \text{ اگر } \alpha = 1, \text{ آنگاه}$$

۱.  $f$  با تغییر کراندار است.      ۲.  $f$  تابعی ثابت است.
۳.  $f$  با تغییر کراندار نیست.      ۴.  $f$  پیوسته مطلق نیست.



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

www.PnuNews.com  
www.PnuNews.net

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱۲- طول خم  $\gamma(t) = (\sin t, \cos t, t)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  برابر کدام گزینه است؟

۱.  $2\pi - 1$       ۲.  $\sqrt{2}\pi$       ۳.  $2\sqrt{2}\pi$       ۴.  $2\pi$

۱۳- برای دنباله ی توابع  $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$  بر بازه  $[0, 1]$ ، مقدار  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx - \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx$  برابرست با:

۱. موجود نیست.      ۲.  $+1$       ۳. صفر      ۴.  $-1$

۱۴- اگر  $\{f_n\}$  و  $\{g_n\}$  دو دنباله از توابع حقیقی و به طور یکنواخت همگرا باشند، کدام یک از دنباله های زیر ممکن است به طور یکنواخت همگرا نباشد؟

۱.  $\{f_n g_n\}$       ۲.  $\{f_n - g_n\}$       ۳.  $\{f_n + g_n\}$       ۴.  $\{-f_n\}$

۱۵- سری  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin nx}{n^\alpha}$  بر بازه  $[0, 1]$  به ازای چه مقادیری از  $\alpha$  به طور یکنواخت همگراست؟

۱.  $\alpha < 0$       ۲.  $\alpha \geq 0$       ۳.  $\alpha > 0$       ۴.  $\alpha \leq 0$

۱۶- اگر  $X$  یک فضای متریک فشرده و  $A$  زیر جبری از  $C_r(X)$  باشد، در چه صورت  $\bar{A} = C_r(X)$ ؟

۱.  $A$  نقاط  $X$  را جدا کند.      ۲.  $A$  نقاط  $X$  را جدا کند و  $X$  صفر نباشد.  
۳.  $A$  خود الحاق باشد و  $X$  صفر نباشد.      ۴.  $A$  خود الحاق باشد و نقاط  $X$  را جدا کند

۱۷- اگر  $X$  فشرده باشد و  $f_n \in C(X)$  به طوری که نقطه وار کراندار و همپیوسته باشد، ان گاه  $\{f_n\}$

۱. بر  $X$  به طور یکنواخت کراندار است.      ۲. بر  $X$  به طور یکنواخت همگراست.  
۳. بر  $X$  به طور یکنواخت کراندار و همگراست.      ۴. بر  $X$  به طور یکنواخت همگرا و کراندار نیست



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

www.PnuNews.com  
www.PnuNews.net

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱۸- کدام گزینه صحیح نیست؟

۱. دو سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} a_n x^n$  دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۲. دو سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1}$  دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۳. دو سری توانی  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  و  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$  دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۴. دو سری توانی  $\sum_{n=1}^{\infty} n! x^n$  و  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  دارای شعاع همگرایی یکسان هستند.

۱۹- اگر شعاع همگرایی سری  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  برابر  $R$  باشد که در آن  $R > 0$ ، شعاع همگرایی سری  $y = \frac{x}{R} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$  برابر است با

۱. ۴

۲.  $\frac{1}{R}$

۳.  $R^2$

۴.  $R$

۲۰- تابع  $E$  را با ضابطه  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  در نظر بگیرید، کدام گزینه صحیح است؟

۱.  $E$  اکیدا نزولی است. ۲.  $E$  کراندار است. ۳.  $E(1) = 1$  ۴.  $E(nx) = (E(x))^n$

### سوالات تشریحی

۱.۴۰ نمره

۱- الف) قضیه (اول مقدار میانگین) را فقط بیان کنید.

ب) (قضیه مشتق گیری) فرض کنید  $f \in R(\alpha)$  و  $(a \leq x \leq b)$   $F(x) = \int_a^x f d\alpha$  انگاه ثابت کنید،

۱) اگر  $\alpha$  در  $x_0$  پیوسته باشد، انگاه  $F$  در  $x_0$  پیوسته است.

۲) اگر  $f$  در  $x_0$  پیوسته و  $\alpha$  در  $x_0$  مشتق پذیر باشد، انگاه  $F$  در  $x_0$  مشتق پذیر است و

$$F'(x_0) = f(x_0) \alpha'(x_0)$$

۱.۴۰ نمره

۲- فرض کنید  $f$  بر  $(a, \infty)$  ( $a > 0$ ) تعریف شده است،  $1 < p$  و  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\log x)^p f(x)$  موجود است ثابت کنید

$$\int_a^{\infty} |f(x)| dx < \infty$$



تعداد سوالات: تستی: ۲۰ تشریحی: ۵

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۷۵

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: آنالیز ریاضی ۲

www.PnuNews.com  
www.PnuNews.net

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی محض (آنالیز)، ریاضی محض (هندسه)، ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی)، ریاضی کاربردی (آنالیز عددی)، ریاضی محض (جبر) ۱۱۱۱۰۴۱ - آمار ۱۱۱۱۰۸۸

۱.۴۰ نمره

۳- شرط لازم و کافی برای آنکه  $f_n \Rightarrow f$  یعنی  $f_n$  به طور یکنواخت همگرا به  $f$  بر  $E$  باشد آن است که

$$\sigma_n = \sup |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$$

۱.۴۰ نمره

۴- قضیه (دینی) را بیان و اثبات کنید.

۱.۴۰ نمره

۵- دنباله  $\{f_n\}$  با ضابطه  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^\alpha}$  تعریف شده است. مطلوبست تعیین مقادیر  $\alpha$  به طوری که این دنباله بر  $[0, \infty)$  به طور یکنواخت همگرا باشد.