

سری سوال: یک ۱

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

www.PnuNews.com

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

استفاده از ماشین حساب مهندسی مجاز است

۱- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع  $P(X = x) = 3\left(\frac{1}{4}\right)^k, k = 1, 2, 3, \dots$  و با تابع مولد احتمال  $\varphi(s)$  باشد مقدار

(۱)  $\varphi''$  کدامست؟

۵ .۴

۹ .۳

۸ .۲

۸ .۱  
۹

۲- اگر  $x$  یک متغیر تصادفی با تابع چگالی  $f(x) = 5e^{-5x}, x > 0$  و  $y | X = x$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $3x$

باشد  $E(Y^2)$  چیست؟

۱۲ .۴

۳۳ .۳  
۲۵

۲۰ .۲  
۲۵

۲۴ .۱  
۲۵

۳- تاس سالمی را متوالیا پرتاب می کنیم تا ۶ بیاید. در صورت مشاهده  $k (k = 1, 2, \dots, 5)$  دقیقه صبر می کنیم و سپس دوباره تاس را پرتاب می کنیم. اگر  $T$  مدت زمان انتظار تا آمدن ۶ باشد.  $E(T)$  چیست؟

۱۵ .۴

۱۶ .۳

۱۲ .۲

۱۰ .۱

۴- اگر  $X_1$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  و  $X_2, \dots, X_n$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\frac{\theta}{2}$  باشند. با فرض مستقل بودن

$X_1, \dots, X_n$  چقدر احتمال دارد که  $X_1$  کوچکترین مشاهده باشد؟

۲ .۴  
 $n+1$

$\theta$  .۳  
 $n+1$

$\theta$  .۲  
 $n$

$(n+2)\theta$  .۱

۵- اگر  $X_1$  دارای توزیع یکنواخت بر  $(0,1)$  و  $X_2 | X_1 = x_1$  دارای توزیع یکنواخت بر  $(x_1, 0)$  و به همین ترتیب  $X_{n+1} | X_n = x_n$  دارای توزیع یکنواخت بر  $(x_n, 0)$  باشند مقدار  $Var(X_n)$  چیست؟

۸۷ .۴

۳۴ .۳

۱۷۵ .۲  
۲۰۷۳۶

۱۷۵ .۱  
۲۰۷

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۶- اگر  $N(t)$  دارای توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  و  $N(a, b) = N(b) - N(a)$  باشد،  
 $P(N(2, 3) = 6 | N(0, 4) = 10)$  کدام است؟

$$.1 \quad P(N(1) = 6, N(3) = 4 | N(4) = 10) = \frac{P(N(1) = 6, N(3) = 4)}{P(N(4) = 10)}$$

$$.2 \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$.3 \quad \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$$

$$.4 \quad \binom{10}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$$

۷- عددی در فاصله  $(0, 1)$  انتخاب می‌کنیم و آن را  $X$  می‌نامیم. اگر  $X = X$  باشد سکه ای که احتمال شیر آمدنش  $X$  است را  $n$  بار پرتاب می‌کنیم. توزیع تعداد شیرها چیست؟

۱. یکنواخت پیوسته      ۲. هندسی      ۳. پواسن      ۴. یکنواخت گسسته

۸- در سوال شماره ۷ با فرض  $n = 5$  واریانس تعداد شیرها چیست؟

۱.  $\frac{195}{4}$       ۲.  $\frac{35}{12}$       ۳.  $\frac{2}{5}$       ۴. ۱

۹- اگر  $A_1, A_2, \dots$  یک دنباله از پیشامدهای نزولی و  $P(A_k) = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{1}{n} \frac{2}{n} \dots \frac{k}{n}}$  باشند، مقدار  $P(\bigcup A_i)$  چیست؟

۱.  $1 - \frac{2}{e}$       ۲.  $\frac{1}{e}$       ۳. ۱      ۴. صفر

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمارریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۱۰- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی باشد طوریکه

$$P(X > k + 1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^p, k = 0, 1, 2, \dots$$

چگونه  $E(X)$  است؟

۴.  $\frac{\pi^p}{6}$

۳.  $\frac{\pi}{6}$

۲.  $\frac{\pi^p}{3}$

۱.  $\frac{\pi}{3}$

۱۱- اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با مقادیر صحیح و نامنفی و  $P(X > k + 1 | X > k) = \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^p$  باشد  $E(X)$  چگونه است؟

۴.  $\frac{\pi}{6}$

۳.  $\frac{\pi}{3}$

۲.  $\frac{\pi^p}{3}$

۱.  $\frac{\pi^p}{6}$

۱۲- توزیع ایستا در یک زنجیر زاد و مرگ با فرض  $q_x = q > 0, p_x = p > 0$  چه نام دارد؟

۴. توزیع کای اسکور

۳. توزیع نرمال

۲. توزیع پواسون

۱. توزیع هندسی

۱۳- در زنجیر ارفنست ساده با ۵ مهره اگر  $X$  دارای توزیع یکنواخت گسسته برفضای حالت باشد آنگاه  $E(X_1)$  چگونه است؟

۴. ۳۷

۳. ۲۴

۲. ۱۲

۱. ۲/۵

۱۴- اگر  $\{X_n, n \geq 0\}$  یک زنجیر مارکف با فضای حالت  $\{0, 1\}$  و ماتریس احتمال انتقال  $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$  باشد با فرض  $\pi_0 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  مطلوب است  $P(X_{10} = 1)$ .

۴.  $\frac{4}{7}$

۳.  $\frac{4}{7} + \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

۲.  $\frac{4}{7} - \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

۱.  $\frac{4}{7} - \frac{1}{14} \left(\frac{5}{12}\right)^{10}$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۱۵- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده اگر  $p = \frac{1}{2}$  باشد آن گاه:

۱. زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی است  
۲. زنجیر تحویل ناپذیر بازگشتی پوچ است  
۳. زنجیر تحویل ناپذیر گذرا است  
۴. موارد ۱ و ۲

۱۶- در سوال شماره ۱۴ با فرض  $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$  مقدار  $E_0(T_0)$  چیست؟

۱.  $\frac{17}{9}$   
۲. ۱۷  
۳. ۱  
۴. ۱۲

۱۷- اگر  $X$  و  $Y$  حالت‌هایی از یک زنجیر مارکف  $\{X_n, n \geq 0\}$  و  $P_{xy}^{(n)} = \frac{1}{4(n-1)!}$  باشند. مقدار  $E_x(N(y))$  برابر است با:

۱.  $e$   
۲.  $\frac{e}{4}$   
۳.  $0.25$   
۴. ۲۵

۱۸- اگر  $Y$  حالتی گذرا باشد آن گاه کدام مورد زیر درست است؟

۱.  $P(N(Y) = \infty) = 1$   
۲.  $E_x(N(Y)) = \frac{f_{xy}}{1-f_{yy}}$   
۳.  $E_x(N(Y)) = \infty$   
۴. موارد ۱ و ۲

۱۹- اگر  $\{X_n, n \geq 0\}$  یک زنجیر مارکف همگن و  $Y$  حالت گذرا باشد.  $f_{yy} = \frac{12}{25}$ ،  $f_{xy}^{(n)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ،  $n \geq 1$  اگر فرآیند از حالت  $X$  شروع به فعالیت نموده باشد متوسط تعداد دفعات برخورد به حالت  $Y$  چیست؟

۱. ۱۵  
۲.  $\frac{12}{25}$   
۳. نامشخص  
۴.  $\frac{100}{127}$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۲۰- گزاره صحیح کدام است؟

۱. اگر  $y \rightarrow x$  باشد آنگاه هر دو حالت  $X$  و  $Y$  یا گذریند و یا بازگشتی
۲. تمام حالت‌های یک زنجیر مارکف با فضای حالت‌های متناهی بازگشتی است
۳. رابطه در دسترس بودن یک رابطه هم ارزی است
۴. هر سه مورد

۲۱- گزاره صحیح کدام است؟

۱. هر زنجیر مارکف با فضای حالت متناهی فقط یک حالت بازگشتی دارد
۲. شرط لازم و کافی برای آنکه حالت صفر در زنجیر قدم زدن تصادفی بازگشتی باشد آن است که  $p = \frac{1}{3}$ .
۳. اگر دو حالت در دسترس همدیگر باشند آن گاه هر دو از یک جنسند.
۴. هر سه مورد

۲۲- در مسئله ورزشکستگی قمارباز با سرمایه مجموع ۵ حالت‌های گذرای زنجیر چیست؟

۱.  $\{1, 2\}$
۲.  $\{0, 5\}$
۳.  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$
۴.  $\{1, 2, 3, 4\}$

۲۳- در مسئله ورزشکستگی قمارباز با  $a = 2, b = 3$  و  $p = \frac{1}{4}$  احتمال ورزشکستگی شخص  $A$  چقدر است؟

۱.  $0/12$
۲.  $0/54$
۳.  $\frac{1}{10}$
۴.  $\frac{90}{91}$

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۲۴-

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

اگر  $\{X_n, n \geq 0\}$  یک زنجیر مارکف با فضای حالت  $\{0, 1, 2, 3\}$  و ماتریس احتمال انتقال

باشد  $E_0(N(1))$  چیست؟

۱۲ .۴

$\frac{14}{5}$  .۳

$\frac{1}{5}$  .۲

$\frac{3}{5}$  .۱

۲۵- در سوال شماره ۲۳ اگر A بهتر از B بازی کند و  $p = \frac{3}{5}$  باشد  $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_a$  چیست؟  $\lim_{b \rightarrow \infty} \alpha_a$  احتمال

ورشکستگی شخص A است)

۰۴ . صفر

۱ .۳

$\frac{5}{9}$  .۲

$\frac{4}{9}$  .۱

۲۶- اگر تعداد نوزادان هر فرد  $\xi$  در فرآیند شاخه ای دارای توزیع  $p(\xi = k) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}, k = 0, 1, 2, \dots$  باشد احتمال

انقراض نسل چیست؟

۰۴ . نمی توان حساب کرد

$\frac{1}{7}$  .۳

$\frac{1}{8}$  .۲

۰۱ . حتمی است

۲۷- کدام مورد درباره زنجیر زاد و مرگ با  $p_0 = 1, p_x > 0, r_x = 0, q_x \equiv p, p_x \equiv p$  درست است؟

۰۲ . همواره تحویل ناپذیر با زگشتی است

۰۱ . همواره تحویل ناپذیر گذرا است

۰۴ . با شرط  $q \geq p$  تحویل ناپذیر گذرا است

۰۳ . با شرط  $q \geq p$  تحویل ناپذیر با زگشتی است

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱ یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

۲۸- در سوال شماره ۲۷، اگر  $p = \frac{1}{4}$  باشد واریانس توزیع مانای آن برابر است با:

۱. ۴  
 $\frac{1}{8}$

۳. ۳  
 $\frac{3}{7}$

۲. ۱  
 $\frac{1}{16}$

۱. ۱  
 $\frac{1}{20}$

۲۹- در زنجیر مارکوف با فضای حالت  $\{0, 1\}$  و با  $f_{00}^{(1)} = \frac{1}{3}, f_{00}^{(2)} = \frac{1}{2}$  مقدار  $E_0(T_0)$  چیست؟

۱۲. ۴

۳. ۱  
 $\frac{1}{19}$

۲. ۱۷  
 $\frac{17}{9}$

۱. ۱  
 $\frac{1}{9}$

۳۰- چه نوع زنجیرهایی دارای توزیع مانایند؟

۲. تحویل ناپذیر و بازگشتی پوچ

۱. تحویل ناپذیر و گذرا

۴. موارد ۲ و ۳

۳. تحویل ناپذیر و بازگشتی مثبت

تعداد سوالات: تستی: ۳۰ تشریحی: ۷

زمان آزمون (دقیقه): تستی: ۶۰ تشریحی: ۶۰

سری سوال: ۱: یک

عنوان درس: فرآیندهای تصادفی ۱

www.PnuNews.com

رشته تحصیلی/کد درس: ریاضی (محض)، ریاضی (کاربردی) (۱۱۱۱۰۵۳ - آمار، آمار ریاضی ۱۱۱۷۰۲۹ - آمار و کاربردها، ریاضیات و کاربردها) www.PnuNews.Net

### سوالات تشریحی

- ۱- یک جسم رادیواکتیو، ذراتی را با نرخ  $\lambda$  ذره در دقیقه منتشر می‌کند. اگر  $N_i$  تعداد ذرات منتشر شده در فاصله ای به طول  $t$  دقیقه باشد و هر ذره با احتمال ثابت  $p$  ثبت شود توزیع تعداد ذرات ثبت شده را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۲- اگر  $N$  متغیری تصادفی با توزیع پواسن با پارامتر  $\lambda$  و  $X_0, X_1, \dots$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با توزیع هندسی با پارامتر  $p$  باشد. بشرط استقلال  $N$  از  $X$ ها تابع مولد احتمال  $Y = \sum_{i=1}^N X_i$  را یافته سپس به کمک آن میانگین  $Y$  را بیابید. ۱۰۰ نمره
- ۳- در زنجیر قدم زدن تصادفی ساده در حالت  $p=q$  مقدار  $E_0(N(\circ))$  بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۴- اگر  $\{X_n, n \geq 0\}$  یک زنجیر مارکف باشد بازای هر  $X$  و  $Y$  از فضای حالتها و هر  $n \geq 1$  روابط زیر را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۵- در زنجیر زاد و مرگ با فضای حالت  $\{0, 1, 2, \dots\}$  و با احتمالهای تغییر وضعیت  $p_{xx+1} = p_x, p_{xx-1} = q_x, p_{xx} = r_x, x > 0$  شرط وجود توزیع مانا را بدست آورید. ۱۰۰ نمره
- ۶- در زنجیرهای مارکف زمان - پیوسته معادله پسر و کولموگوروف را بیان و آن را ثابت کنید. ۱۰۰ نمره
- ۷- در زنجیر مارکف زمان پیوسته با فضای حالت  $\{0, 1, 2, \dots\}$  و بازای  $x \neq y, x \neq 0$  داشته باشیم.  $q_{xx+1} = \lambda, q_{x0} = \mu$  اولاً: معادله پیشرو کولموگوروف را یافته و با استفاده از آن توزیع مانای آن را بیابید. ۱۰۰ نمره